

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 класс**

Решения задач.

10.1. Обозначим $2^{2023} = n$. Получим $\frac{n+1}{2n+1} - \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{(n+1)(4n+1) - (2n+1)^2}{(2n+1)(4n+1)} = \frac{4n^2 + 5n + 1 - 4n^2 - 4n - 1}{(2n+1)(4n+1)} = \frac{n}{(2n+1)(4n+1)} > 0$ для любого n .

Ответ: $\frac{2^{2023} + 1}{2^{2024} + 1} > \frac{2^{2024} + 1}{2^{2025} + 1}$.

10.2. Обозначим первоначальное число станков через x , а число оставшихся станков через n . Условие задачи приводит к уравнению: $x \cdot \frac{100-n}{100} = n$. Преобразуем это уравнение к виду: $x = \frac{10000}{100-n} - 100$.

Для того, чтобы найти наименьшее значение x , число $100 - n$ надо брать наибольшим. Методом полного перебора найдем все делители числа 10000, меньшие 100. Получим $100 - n = 80$. Откуда $x = 25$.

Ответ: 25 станков.

10.3. $2x^2 + y^2 = 2xy + 4x$;
 $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2xy + x^2 = 4$;
 $(x-2)^2 + (x-y)^2 = 4$.

Если сумма двух квадратов целых чисел равна 4, то один из квадратов равен 4, а другой – 0.

Пусть $(x-2)^2 = 0$, тогда $x = 2$ и $(2-y)^2 = 4$. Откуда получаем, что $2 - y = 2$ или

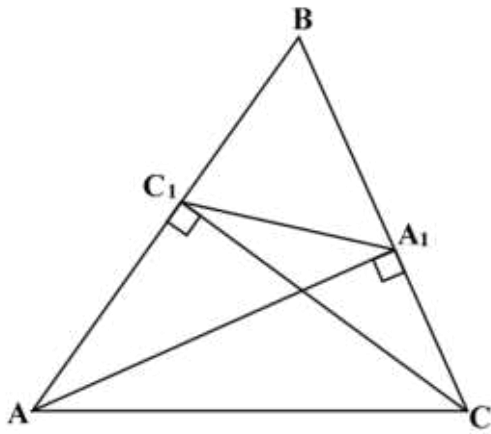
$2 - y = -2$, то есть, $y = 0$ или $y = 4$. Таким образом, получаем два первых решения: $(2;0)$, $(2;4)$.

Пусть $(x-2)^2 = 4$, тогда $x = 4$ или $x = 0$. Откуда получаем, что $x - y = 0$, что дает ответы: $(0;0)$ $(4;4)$

Таким образом: $(2;0)$, $(2;4)$, $(0;0)$, $(4;4)$.

Ответ: $(2;0)$, $(2;4)$, $(0;0)$, $(4;4)$.

10.4. Пусть A_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC , опущенных из вершин A и C соответственно, $\angle B = \beta$, а R – радиус описанной окружности.



Независимо от вида треугольника ABC треугольник A_1BC_1 ему подобен. Заметим, что треугольники AA_1B и CC_1B прямоугольные с углом при вершине B, равным β , если $\beta < 90^\circ$, и равным $180^\circ - \beta$, если $\beta > 90^\circ$.

Во всех случаях $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{BC} = |\cos\beta|$.

Так как по условию $A_1C_1 = \frac{R}{2}$, а по теореме синусов $AC = 2R\sin\beta$, получаем уравнение

$$2 \sin\beta \cdot |\cos\beta| = \frac{1}{2}. (*)$$

Если $\beta < 90^\circ$, то из (*) $\sin 2\beta = \frac{1}{2}$, откуда $2\beta = 30^\circ$ или $2\beta = 150^\circ$. То есть $\beta = 15^\circ$ или $\beta = 75^\circ$.

Если $\beta > 90^\circ$, то получаем уравнение $\sin 2\beta = -\frac{1}{2}$, откуда $2\beta = 210^\circ$ или $2\beta = 330^\circ$.

Ответ: $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 165^\circ$

10.5. Составим таблицу 7×7 , в каждой клетке которой напишем число, равное количеству допустимых путей, которыми король может прийти до этой клетки из левого нижнего угла. Заполнять таблицу будем постепенно. Сначала левый столбец и нижнюю строку единицами. Кроме того, в центральной клетке ставим ноль (по условию задачи). Далее заполняем второй слева столбец и вторую снизу строку и т.д. по следующему правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в трех соседних клетках – снизу, слева и по диагонали (снизу слева). В результате получим таблицу. Ответом служит число, стоящее в правом верхнем углу.

1	13	85	314	848	2078	5020
1	11	61	168	366	864	2078
1	9	41	66	132	366	848
1	7	25	0	66	168	314
1	5	13	25	41	61	85
1	3	5	7	9	11	13
1	1	1	1	1	1	1

Ответ: 5020